$$f(x) = |-x^2+4x| - 4$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-4 & -x^2+4x \geq 0 \\ x^2+4x-4 & -x^2+4x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-4 & 0 \leq x \leq 4 \\ x^2-4x-4 & x < 0 \ \vee \ x > 4 \end{cases}$$

Dominio : $D = \mathbb{R}$

Grafico:

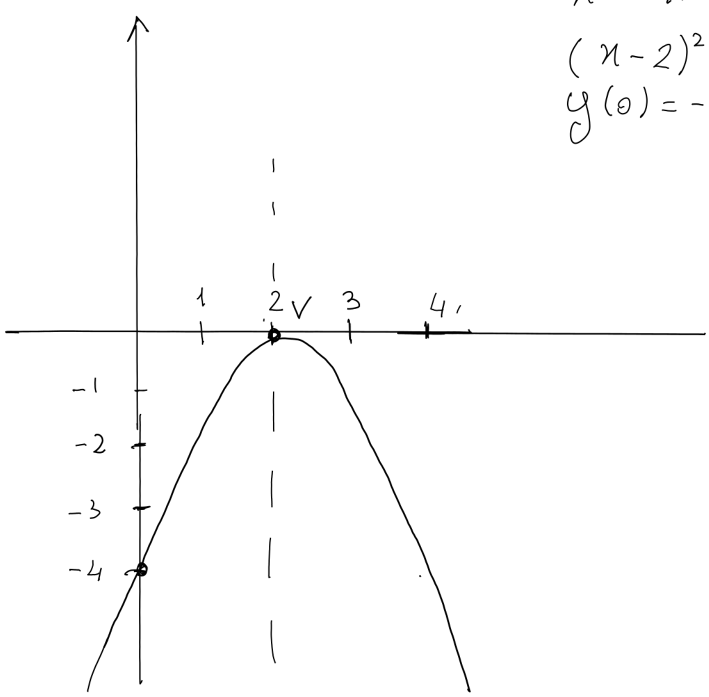
\- 1ª parabola $y = -x^2+4x-4$

$$\begin{cases} x_V = -4/_{-2} = 2 \\ y_V = -\dfrac{16-16}{-4} = 0 \\ y = -x^2+4x-4 = 0 \end{cases}$$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2 = 0 \qquad x=2$ RADICE

$y(0) = -4$ (INTERCETTA)



- 2ª parabola $y = x^2 - 4x - 4$

$$\begin{cases} x_V = 4/2 = 2 \\ y_V = -\dfrac{16+16}{4} = 8 \\ y = x^2 - 4x - 4 = 0 \quad ; \quad x^2 - 4x - 4 = 0 \quad ; \quad x_{12} = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

(RADICI)

$y(0) = -4$ (INTERCETTA)

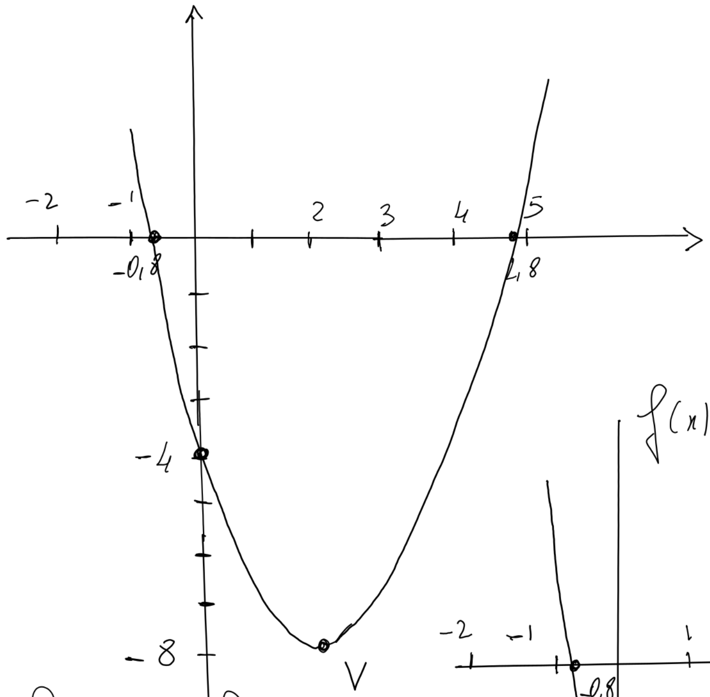
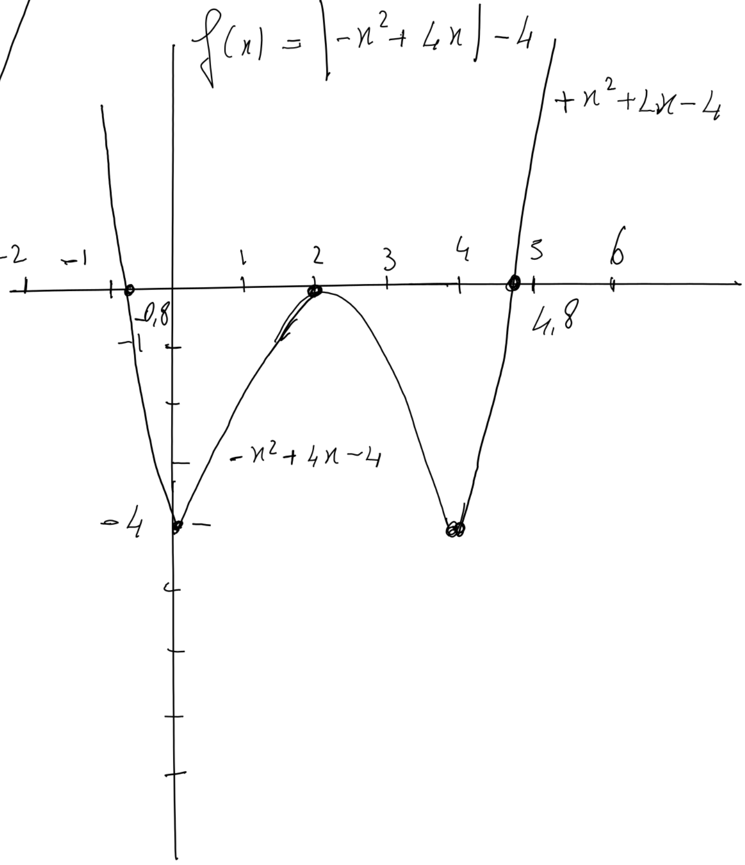


Grafico di $f(x)$:



Il codominio è $]-4, +\infty[$

Consideriamo ora la funzione $g(x) = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$

La funzione per intervalli è:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 & f(x) \geq 0 \\ \dfrac{-f(x)}{f(x)} = -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

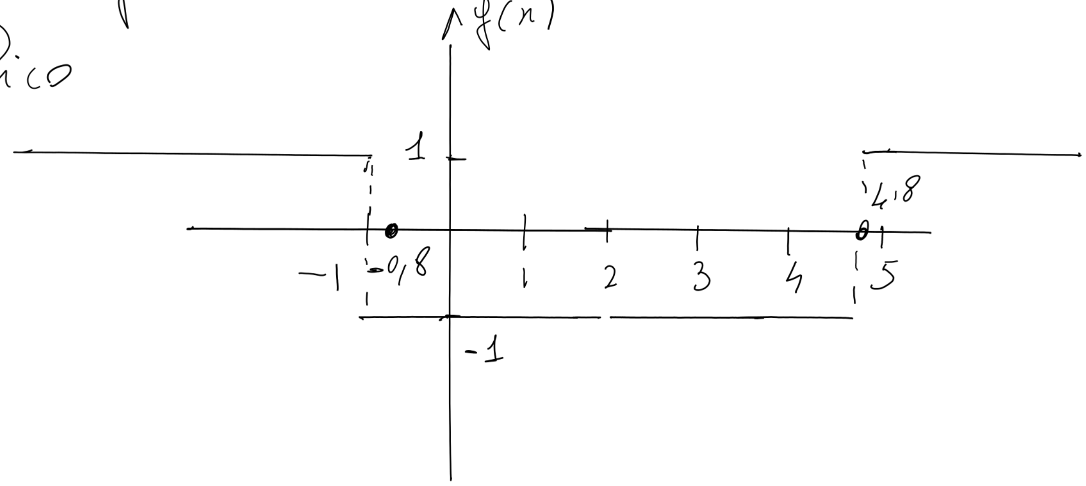
Osserviamo dal grafico precedente che $f(x) \geq 0$ se $x \leq 2-2\sqrt{2} \vee x \geq 2+2\sqrt{2}$ e che $f(x) < 0$ se $2-2\sqrt{2} < x < 2 \vee 2 < x < 2+2\sqrt{2}$

Da cui

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 2-2\sqrt{2} \vee x \geq 2+2\sqrt{2} \\ -1 & 2-2\sqrt{2} < x < 2 \vee 2 < x < 2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

In $x = 2$ $g(x)$ è indeterminata $(0/0)$

Grafico



Quindi il dominio di $g(x)$ è $\mathbb{R}$ e il codominio sono i punti -1 e 1 (in $x=2$ con la teoria dei limiti si può dimostrare che $g(x)=-1$)

Per rendere pari la $f(x)$ bisogna applicare un vettore di traslazione $v(-2,0)$

$$\begin{cases} x' = x-2 \\ y'=y \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y' \end{cases}$$

Sostituendo:

$$f(x') = \begin{cases} -(x'+2)^2+4(x'+2)-4 & 0 \leq x'+2 \leq 4 \\ (x'+2)^2-4(x'+2)-4 & x'+2<0 \vee x'+2>4 \end{cases}$$

$$f(x') = \begin{cases} -x'^2 & -2 \leq x' \leq 2 \\ x'^2-8 & x'<-2 \vee x'>2 \end{cases}$$