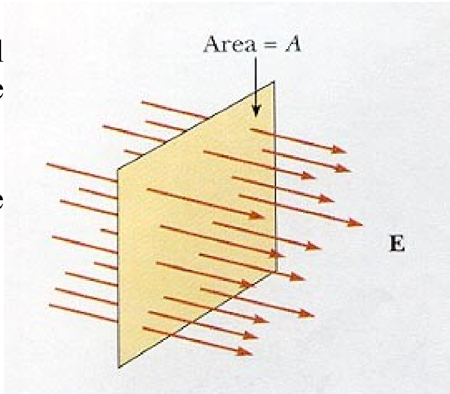
APPUNTI SULLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Un campo scalare è una distribuzione nello spazio di una grandezza fisica scalare (per esempio la conoscenza della temperatura in ogni punto dello spazio è un campo scalare di temperature).
Un campo vettoriale è una distribuzione nello spazio di una grandezza vettoriale (per esempio il campo elettrico e il campo magnetico sono campi vettoriali).
Si può dimostrare che per conoscere tutte le proprietà di un campo vettoriale basta conoscerne due: il flusso attraverso una superficie chiusa e la circuitazione.
Le quattro equazioni di Maxwell non sono altro che il flusso attraverso una superficie chiusa e la circuitazione per il campo elettrico e per il campo magnetico.

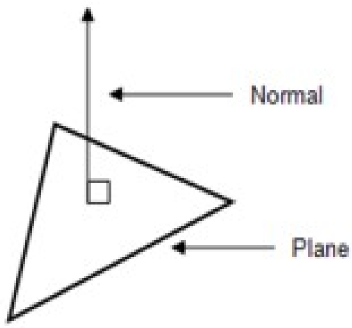
FLUSSO

Il flusso di un vettore è proporzionale al numero di linee del campo che attraversano una superficie. Per calcolarlo occorre prima definire un vettore chiamato vettore superficie.



VETTORE SUPERFICIE. Data una superficie piana il vettore superficie ad essa associato avrà:

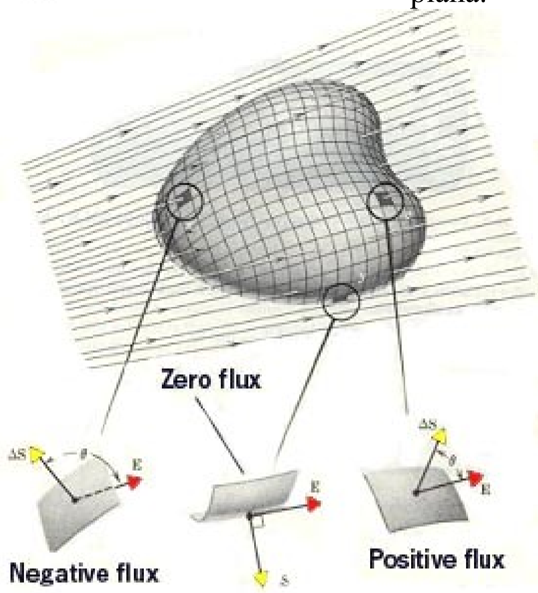
1. direzione perpendicolare (normale) alla superficie
2. intensità uguale all'area della superficie
3. verso arbitrario



FLUSSO. Il flusso è definito come il prodotto scalare tra campo e vettore superficie

$$\phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos(\vec{B}, \vec{A})$$

Se la superficie non è piana occorre dividere la superficie in tante porzioni in modo tale che ogni porzione può essere considerata piana.



Per calcolarlo occorre ottenere tutti questi flussi elementari e farne la somma algebrica:

$$\phi(\vec{B}) = \Sigma\, \vec{B}_i \cdot \vec{A}_i = \Sigma\, B_i \cdot A_i \cdot \cos(\vec{B}_i, \vec{A}_i)$$

http://sol.sci.uop.edu/~jfalward/electricforcesfields/electricforcesfields.html

Se le superfici elementari sono molto piccole dalla somma passiamo all'integrale:

$$\phi(\vec{B})=\int \vec{B}\cdot d\,\vec{A}$$

Questo integrale non è semplice da calcolare perché è un integrale di superficie (in pratica è un doppio integrale).

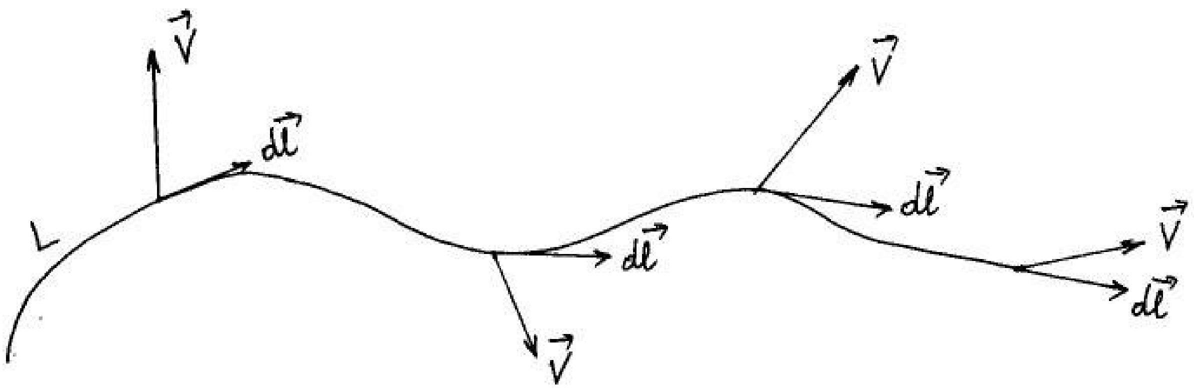
Se la superficie è chiusa il verso del vettore superficie o meglio, dei vettori superficie elementari, non è arbitrario ma è definito uscente dalla superficie.

CIRCUITAZIONE

Consideriamo un campo vettoriale e un piccolo segmento orientato diretto in un certo modo. Campo e segmento hanno la stessa direzione ? Di quanto sono lontane le direzioni del vettore del campo e quella del segmento ?

Chiamiamo orientazione del campo il prodotto scalare tra il vettore del campo e il segmento:

$$Orientazione=\vec{V}\cdot d\,\vec{l}=V\cdot d\,l\cdot\cos(\vec{V},d\,\vec{l})$$



Per un percorso non rettilineo si può dividere il percorso in tanti tratti tali da poter essere considerati rettilinei, effettuare i prodotti scalari e poi la somma algebrica:

$$Orientazione=\Sigma\,\vec{V}_i\cdot d\,\vec{l}_i=\Sigma\,V_i\cdot d\,l_i\cdot\cos(\vec{V}_i,d\,\vec{l}_i)$$

Se i segmenti elementari sono molto piccoli dalla somma passiamo all'integrale:

$$Orientazione=\int \vec{V}\cdot d\,\vec{l}$$

La circuitazione è l'orientazione calcolata su un percorso chiuso:

$$\Gamma(V)=\int_{chiuso}\vec{V}\cdot d\,\vec{l}$$

TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è dato dalla carica inclusa fratto ε_0.

$$\phi_{chiusa}(\vec{E}) = \frac{Q_{inclusa}}{\epsilon_0}$$

Il fatto che il flusso dipenda dalla carica inclusa significa che il campo ha delle sorgenti (le cariche positive) o dei pozzi (le cariche negative).
Il fatto che il flusso è indipendente dalla forma della superficie significa che il campo per una carica puntiforme ha una dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza.

TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è uguale zero

$$\phi_{chiusa}(\vec{B}) = 0$$

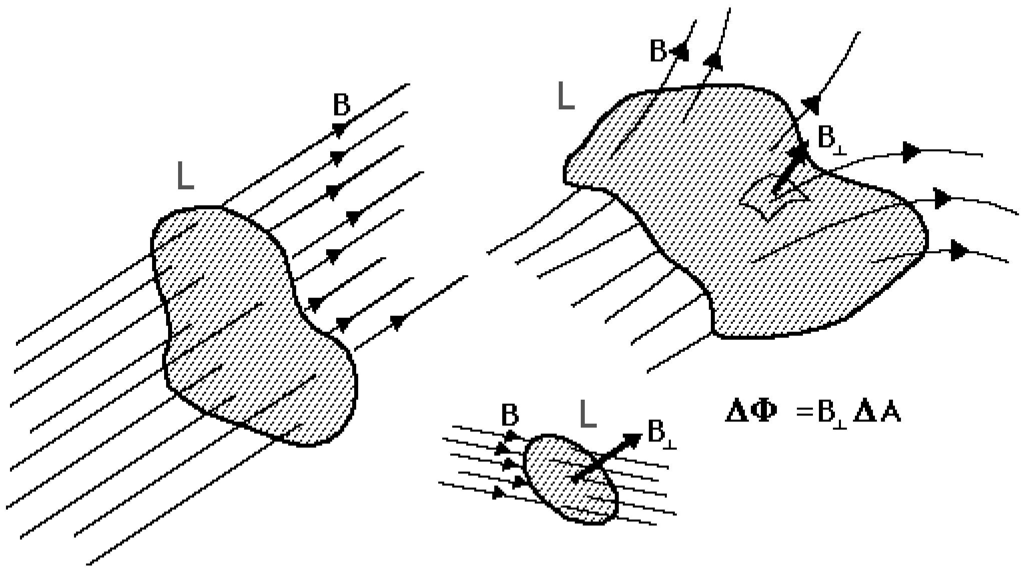
Il fatto che il flusso è sempre uguale a zero significa che non esistono le sorgenti del campo ovvero non esistono delle cariche magnetiche.

TEOREMA DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

La circuitazione del campo elettrico è uguale all'opposto della derivata temporale del flusso magnetico concatenato.

$$\Gamma(E) = -\frac{d\,\phi_{conc}(B)}{dt}$$

Il flusso magnetico concatenato è il flusso del campo magnetico attraverso una superficie il cui percorso (L) è un contorno ovvero una "catena" per la superficie.



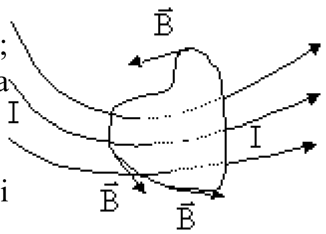
Se un campo ha la circuitazione diversa da zero significa che non ha sorgenti puntiformi. Qui il campo elettrico può avere la circuitazione diversa da zero e ciò significa che le sorgenti del campo elettrico **non sono solo** le cariche elettriche puntiformi. Oltre a loro anche un campo magnetico variabile nel tempo può generare il campo elettrico. Ma in questo caso il campo elettrico sarà variabile nel tempo ed esistente finché il flusso magnetico è variabile nel tempo. Si parla allora di campo elettromagnetico.

TEOREMA DI AMPERE

La circuitazione del campo magnetico è uguale alla corrente che attraversa una qualsiasi superficie concatenata.

$$\Gamma(B)=\mu_0 \cdot i_{conc}$$

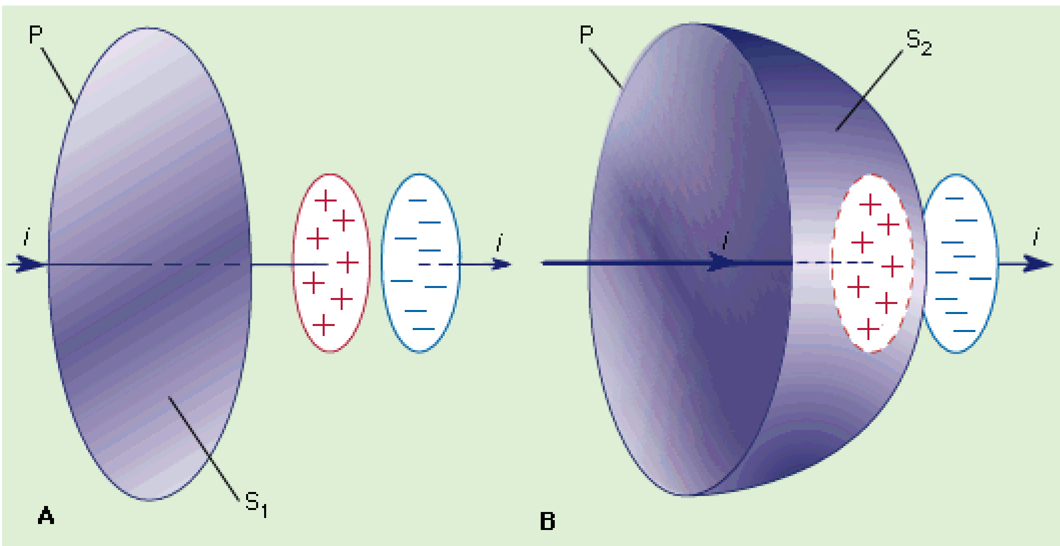
La superficie concatenata non deve essere la minima ma qualsiasi; l'importante è che il contorno attraverso cui si calcola la circuitazione sia una contorno per la superficie.



Qui è determinata l'origine del campo magnetico: le correnti elettriche.

Come per il campo elettrico le correnti elettriche **non solo le sole** sorgenti del campo magnetico.
Infatti nel teorema di Faraday-Neumann-Lenz si afferma che un campo magnetico variabile nel tempo può generare un campo elettrico variabile nel tempo.
Allora, per simmetria, anche un campo elettrico variabile nel tempo deve poter generare un campo magnetico variabile nel tempo (ipotesi di Maxwell).

Per sostenere l'ipotesi di Maxwell consideriamo un condensatore che si sta caricando.



Consideriamo ora il percorso P della figura A. Attraverso questo percorso la circuitazione di B deve essere diversa da zero perché la superficie S_1 è attraversata da una corrente.
Ma per lo stesso percorso ora consideriamo la superficie S_2 concatenata al percorso ma, scavalcando un'armatura del condensatore, non attraversata da alcuna corrente.
Allora otteniamo il paradosso per cui per due diverse superfici concatenate allo stesso percorso otteniamo due diversi valori della circuitazione.

La soluzione sta nell'assumere un'altra possibilità come sorgenti del campo magnetico: non solo le correnti elettriche ma **anche la derivata del flusso del campo elettrico attraverso la superficie concatenata al percorso** come accade nella legge di Faraday-Neumann-Lenz.
Quindi il teorema di Ampere è in generale:

$$\Gamma(B)=\mu_0 \cdot i_{conc}+\epsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{d\,\phi_{conc}(E)}{dt}$$

Così sorgente del campo magnetico può essere anche un campo elettrico variabile nel tempo. Questo campo magnetico sarà anch'esso variabile nel tempo e, per il teorema di Faraday-Neumann-Lenz, genererà un campo elettrico variabile nel tempo. I campi quindi si autosostengono e possono avere un'esistenza indipendente dalle sorgenti tangibili (cariche e correnti).
Si ha così il campo elettromagnetico.

Prof. Vito Mario La Bella