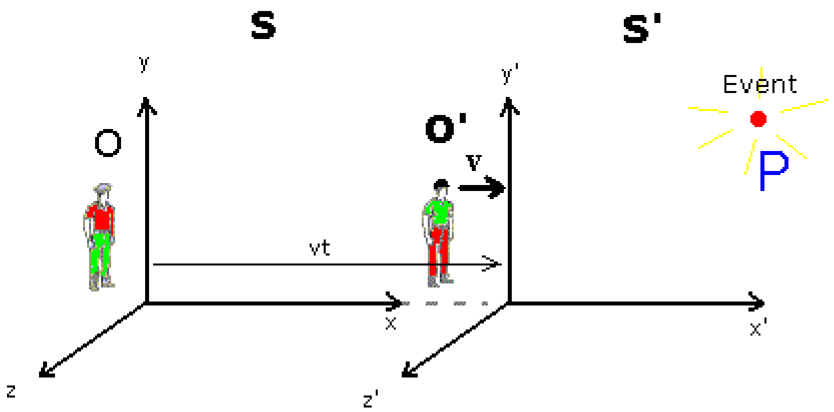
APPUNTI SULLA RELATIVITA' RISTRETTA

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

X è la posizione del punto P misurata dal sistema O e X' è la posizione del punto P misurata dal sistema O'. Le equazioni di trasformazione per O' sono delle formule che gli permettono di ricavare X dalla conoscenza delle sue misure X' e t'. Queste sono secondo la meccanica classica:

$$X = X' + V \cdot t$$
$$t = t'$$

O' sa che il tempo scorre allo stesso modo per lui e per O perché pensa che il tempo si una grandezza fisica assoluta.



Analogamente le equazioni di trasformazione per O sono:
$$X' = X + V \cdot t'$$
$$t' = t$$

Con queste equazioni, e con le sue misure, O può conoscere le misure fatte da O'.

Se ora P si muove con una velocità V_O rispetto ad O e con una velocità $V_{O'}$ rispetto ad O', l' equazione di trasformazione delle velocità per O è (basta dividere la precedente con t'=t):

$$V_{O'} = V_O + V$$

con questa equazione, e con la sua misura V_O della velocità del punto P, O può conoscere la velocità $V_{O'}$ che misurerà O'.
La velocità di un oggetto non è una grandezza fisica assoluta ed è misurata in modo diverso da diversi sistemi di riferimento.
Ma se P viaggia alla velocità della luce c sia O che O' devono misurare lo stesso valore c. L'equazione di trasformazione delle velocità non funziona più perché diventa:

$$c = c + V$$

Se è valido il postulato della costanza della velocità della luce occorre correggere le equazioni di trasformazione.
Poiché una equazione deve poter essere ricavata dall'altra è ragionevole supporre che la correzione potrebbe essere rappresentata da un fattore moltiplicativo γ trascurabile a basse velocità.
Inoltre non si postula che le altre grandezze fisiche siano assolute e quindi deve cadere l'ipotesi di un tempo assoluto.

Così:

(1) $$X=\gamma(X'+V\cdot t')$$

è l'equazione di trasformazione che permette ad O' di conoscere, con le sue misure X' e t', la misura X che farà O.

E:

(2) $$X'=\gamma(X+V\cdot t)$$

è l'equazione di trasformazione che permette ad O di conoscere, con le sue misure X e t, la misura X' che farà O'.

Supponiamo ora che, al tempo t=t'=0, O e O' coincidano e che, quando O' si mette in movimento da P parta un segnale luminoso diretto verso O' e quindi verso O.
Quando il segnale luminoso arriva ad O' è passato per O' il tempo t'. La posizione del punto P rispetto O' è X'= c•t'.
Quando il segnale luminoso arriva ad O è passato per O il tempo t. La posizione del punto P rispetto O è X = c•t.

Sostituendo questa X e questa X' nella (1) e nella (2) si ottiene:

$$c\cdot t=\gamma(c\cdot t'+V\cdot t')=\gamma(c+V)\cdot t'$$

$$c\cdot t'=\gamma(c\cdot t-V\cdot t)=\gamma(c-V)\cdot t$$

moltiplicando tra loro queste equazioni si ottiene:

$$c^2=\gamma^2(c^2-V^2)$$

e infine:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

con β = V/c.

Così le equazioni di trasformazione corrette sono:

(3) $$X=\frac{X'+V\cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(che fornisce ad O' la posizione del punto P misura da O calcolata con le sue misure di spazio e tempo X' e t') e

(4) $$X'=\frac{X-V\cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(che fornisce ad O la posizione del punto P misura da O' calcolata con le sue misure di spazio e tempo X e t).
Poiché i tempi sono misurati diversamente occorre ricavare delle equazioni di trasformazione per i tempi.

C'è da fare un pò di calcoli algebrici ma la strada è quella di sostituire la coordinata X espressa con la (3) nella (4).

Si ricava:

(5)
$$t=\frac{t'+(\frac{\beta}{c})\cdot X'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e

(6)
$$t'=\frac{t-(\frac{\beta}{c})\cdot X}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Riassumendo:

Le equazioni: $X=\frac{X'+V\cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad t=\frac{t'+(\frac{\beta}{c})\cdot X'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

forniscono ad O' le misure della posizione di P rispetto O e il tempo trascorso t.

Le equazioni:

$$X'=\frac{X-V\cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t'=\frac{t-(\frac{\beta}{c})\cdot X}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

forniscono ad O le misure della posizione di P rispetto O' e il tempo trascorso t'.

Queste equazioni sono dette trasformazioni di Lorentz (TdL).

TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITA'

Se P si muove la sua velocità, misurata dal sistema O' sarà: $V_{O'}$ = X'/t'. Applicando le TdL O' può conoscere l' analoga misura fatta da O, basta dividere la (3) con la (5):

$$V_O=\frac{X}{t}=\frac{\frac{X'+V\cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{t'+(\frac{\beta}{c})\cdot X'}{\sqrt{1-\beta^2}}}=\frac{X'+V\cdot t'}{t'+(\frac{\beta}{c})\cdot X'}$$

dividendo ambo i membri con t':

(7)
$$V_O=\frac{X'/t'+V\cdot t'/t'}{t'/t'+(\frac{\beta}{c})\cdot X'/t'}=\frac{V_{O'}+V}{1+(\frac{\beta}{c})\cdot V_{O'}}=\frac{V_{O'}+V}{1+\frac{V\cdot V_{O'}}{c^2}}$$

Questa formula permette ad O', con le sue misure di spazio X' e tempo t' e quindi di velocità $V_{O'}$, di conoscere la velocità V_O del punto P rispetto ad O.

Analogamente O, con la sua misura V_O della velocità del punto P, può conoscere la velocità $V_{O'}$ del punto P rispetto O':

$$V_{O'} = \frac{V_O - V}{1 - \frac{V_O \cdot V}{c^2}} \tag{8}$$

Se P si muove alla velocità della luce rispetto ad O la sua velocità deve essere anche c rispetto ad O'. Sostituendo V_O nella (8):

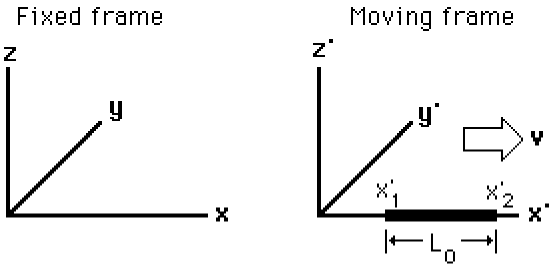
$$V_{O'} = \frac{c - V}{1 - \frac{c \cdot V}{c^2}} = \frac{c - V}{\frac{c - V}{c}} = c$$

si trova che, rispettando il postulato della costanza della velocità della luce, le TdL dicono ad O che O' misura per P una velocità uguale a quella da lui misurata: c.

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Una prima conseguenza dell'applicazione delle TdL è la contrazione delle lunghezze.
Consideriamo la lunghezza di una barra posta nel sistema in moto O'. Per ricavarla O' farà la differenza delle coordinate X'_2 e X'_1 degli estremi della barra.

Chiamiamo lunghezza a riposo o lunghezza propria L_O la lunghezza di un oggetto misurata da un sistema di riferimento per il quale l'oggetto è in quiete.



Quindi $L_O = X'_2 - X'_1$

Per O la barra è in moto. Per misurare la lunghezza della barra O deve effettuare una misura degli estremi della barra **nello stesso istante**, altrimenti, anche senza andare a scomodare la relatività la misura della lunghezza della barra dipenderà dalla velocità della barra. E' come se O deve fare una foto della barra in moto per poi misurarne la lunghezza analizzando la foto.
Chiamiamo L la lunghezza che O ha misurato.
Ora O' può vuole ricavare ciò che O ha misurato applicando alle sue misure le TdL. O' sa che O ha effettuato la sua misura simultaneamente.
Applicando la (4):

$$L_O = X'_2 - X'_1 = \frac{X_2 - V \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{X_1 - V \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

da cui $$L = L_O \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

e poiché β= v/c < 1 allora deve essere L < L_O.

La lunghezza di un oggetto in moto (ovvero misurata da un sistema di riferimento per il quale l'oggetto è in moto) è minore della lunghezza dell'oggetto in quiete (ovvero misurata da un sistema di riferimento per il quale l'oggetto è in quiete).

DILATAZIONE DEI TEMPI

Una seconda conseguenza delle TdL è la dilatazione dei tempi.
Consideriamo un evento che ha un inizio e una fine in quiete rispetto al sistema di riferimento in moto O' (e quindi anch'esso in moto).
La durata di questo evento rispetto O', $\Delta t_O = t'_2 - t'_1$,, è chiamato tempo proprio.

Il tempo proprio è la durata di un evento misurata da un sistema di riferimento per il quale l'evento è in quiete.

Lo stesso evento per O durerà $\Delta t = t_2 - t_1$.
Per sapere che differenza c'è tra Δt e Δt_O occorre applicare le TdL (5):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + (\frac{\beta}{c}) \cdot X'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t'_1 + (\frac{\beta}{c}) \cdot X'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_O}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e poiché $\beta = v/c < 1$ allora deve essere $\Delta t > \Delta t_O$.

La durata di un evento misurata da un sistema di riferimento per il quale l'evento è in moto è più lunga della durata dello stesso evento misurata da un sistema di riferimento per il quale l'evento è in quiete.

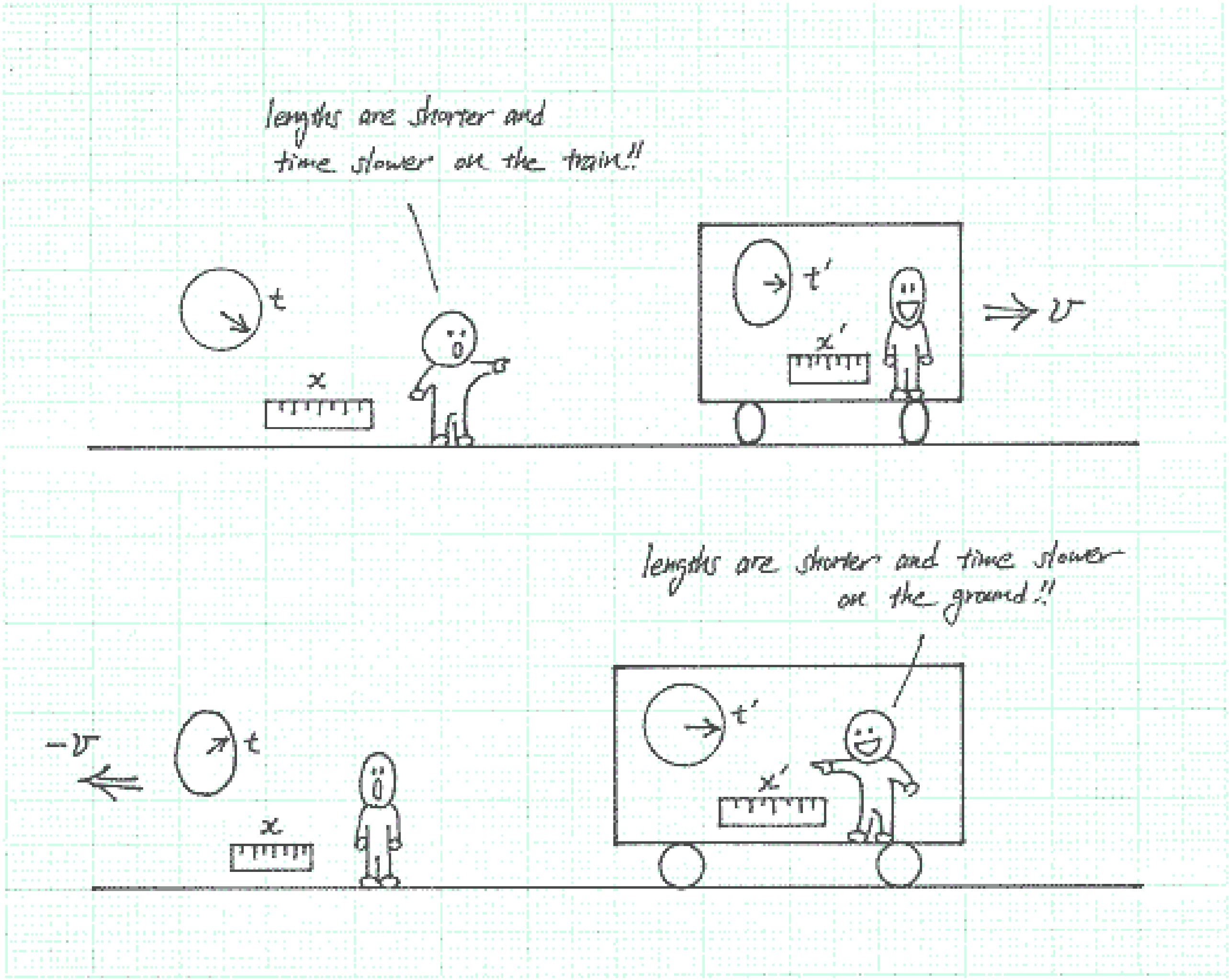
NON SIMULTANEITA' DEGLI EVENTI

Una terza conseguenza delle TdL è la non simultaneità degli eventi.
Se due eventi sono osservati simultanei rispetto ad un sistema di riferimento per il quale gli eventi sono in quiete (ma sono posti comunque in due posti diversi), dal sistema O gli eventi non saranno più simultanei. Applicando la (5):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t' + (\frac{\beta}{c}) \cdot X'_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t' + (\frac{\beta}{c}) \cdot X'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(\frac{\beta}{c})(X'_2 - X'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

Allora a secondo da dove vengono osservati l'evento 1 può procedere l'evento 2 o viceversa.

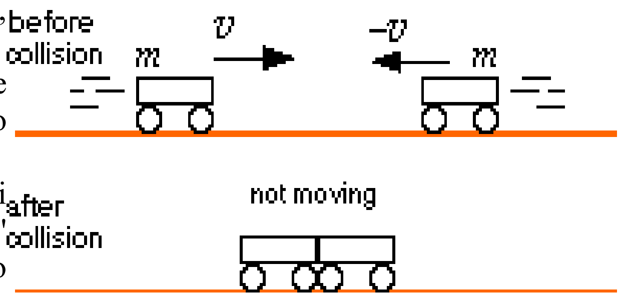
Occorre notare che non esiste un sistema di riferimento assoluto. Se O osserva O' in modo diverso da come O' osserva sé stesso anche O' osserva O in modo diverso da come O osserva se stesso.



fonte: http://www.phys.vt.edu/~takeuchi/relativity/notes/section14.html

MASSA RELATIVISTICA

Consideriamo ora un urto completamente anelastico di due masse uguali che, rispetto ad un sistema di riferimento O, procedono l'una verso l'altra con la stessa velocità. Sempre rispetto ad O il principio di conservazione della quantità di moto prevede che, dopo l'urto le masse, se sono unite, devono rimanere in quiete.
Ora il secondo postulato della relatività afferma che le leggi della fisica sono osservate allo stesso modo da qualsiasi sistema di riferimento inerziale.
Quindi se O ha osservato il principio di conservazione della q.d.m., anche un sistema O' deve osservare la conservazione della q.d.m. per lo stesso fenomeno.



Applicando le T.d.L. O può conoscere le quantità di moto dei corpi, prima e dopo l'urto, che un sistema O', in moto alla velocità V, misura.

Si trova che, prima l'urto per il primo corpo la velocità è:

$$V_{O'1}=\frac{V_{O1}-V}{1-\frac{V_{O1}\cdot V}{c^2}}=\frac{V-V}{1-\frac{V\cdot V}{c^2}}=0$$

per il secondo corpo la velocità è:

$$V_{O'2}=\frac{V_{O2}-V}{1-\frac{V_{O2}\cdot V}{c^2}}=\frac{-V-V}{1-\frac{-V\cdot V}{c^2}}=\frac{-2\cdot V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

La quantità di moto totale è:

(9) $$p'_i=p'_1+p'_2=m\cdot 0+m\cdot\frac{-2\cdot V}{1+\frac{V^2}{c^2}}=-2\,m\cdot\frac{V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

Dopo l'urto la velocità dei due corpi, sempre rispetto O', è:

$$V_{O'}=\frac{V_O-V}{1-\frac{V_O\cdot V}{c^2}}=\frac{0-V}{1-\frac{0\cdot V}{c^2}}=-V$$

La quantità di moto totale è:

(10) $$p'_f=-2\,m\cdot V$$

Come si vede O calcola che le quantità di moto per O' prima e dopo l'urto sono diverse.

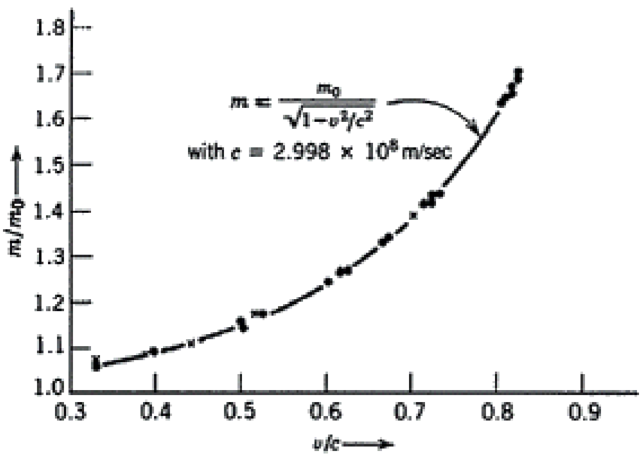
Poiché il principio di conservazione della q.d.m. deve assolutamente valere è evidente che la formula p= mv della q.d.m. deve essere corretta.

La correzione, alla luce anche del principio di conservazione dell'energia, riguarda direttamente la massa che deve essere scritta:

(11) $$m_r=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e la quantità di moto:

$$p=m_r\cdot V=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot V$$



Comunque anche con questa correzione nell'esperimento prima descritto le cose non funzionano. Infatti sostituendo nella (9) e nella (10) la (11) si trova:

$$p'_i = -2\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{V}{1+\frac{V^2}{c^2}} = -2\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{V}{1+\beta^2}$$

e

$$p'_f = -2\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot V$$

La differenza delle q.d.m. indica la possibilità, nell'urto, che non si conservi la massa e che parte della massa si trasformi in energia.

ENERGIA RELATIVISTICA

Il teorema dell'energia cinetica dice che il lavoro fatto su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica:
Il lavoro è definito come:

$$L = F\cdot dx$$

La legge fondamentale della dinamica è:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

da cui la variazione dell'energia cinetica:

$$dE_k = \frac{dp}{dt}\cdot dx$$

sostituendo la quantità di moto relativistica:

$$dE_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot V}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot V}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot V\cdot dt$$

Adesso facciamo la derivata tenendo presente che V è una funzione del tempo.

$$dE_k = m_0\cdot\left[\frac{dV/dt}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot V\right]\cdot V\cdot dt = m_0\cdot\left[\frac{dV/dt}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left(\frac{\frac{\beta}{c}\cdot\frac{dV}{dt}}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\right)\cdot V\right]\cdot V\cdot dt$$

$$dE_k = m_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\right)\cdot\frac{dV}{dt}\cdot V\cdot dt = m_0\cdot\left(\frac{1-\beta^2+\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\right)\cdot dV\cdot V$$

(12) $$dE_k = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} \right) \cdot dV \cdot V$$

Osserviamo che $V \cdot dV = dV^2/2 = c^2 \cdot d\beta^2/2$.

Osserviamo anche che: $$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}} = \frac{d}{d\beta^2} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

Sostituendo nella (12) si trova:

$$dE_k = m_0 \cdot \frac{d}{d\beta^2} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \frac{c^2 \cdot d\beta^2}{2} = d\, \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

poiché le funzioni integrande sono conosciute a meno di una costante additiva arbitraria possiamo scrivere:

$$E_k = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + Costante$$

L'energia cinetica è legata alla velocità e, se la velocità è nulla deve essere $E_k = 0$:

$$0 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-0}} + Costante$$

da cui Costante = $-m_0c^2$. Il termine m_0c^2 è un'energia posseduta quando il corpo è a riposo legata direttamente alla massa ed è chiamata **Energia a riposo**.

L'energia totale è:

(13) $$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e l'energia cinetica è:

$$E_k = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - E_0 = E - E_0$$

Ritornando all'urto anelastico occorre imporre come assoluta la conservazione della quantità di moto relativistica e dell'energia totale. Non è garantita a conservazione della massa.
La massa è legata a una forma di energia che può essere trasformata in un'altra. E' garantita solo la conservazione dell'energia totale (13).

Tratto da I.V. Savelyev – Physics I – MIR Moscow
Creato (senza difficoltà) con OpenOffice.org prof. Vito Mario La Bella